

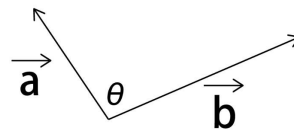
数学「平面上のベクトル」

1 授業のポイント1

○4人ずつグループをつくり話し合いながら解決する
ー「共有の課題 → ジャンプの課題」(アクティブラーニング)ー



質問「ベクトルの内積とは？」



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$$

2 授業のポイント2

○＜共有の課題＞ 多様な解決方法が考えられる課題(ポップ体文字)を提示する。

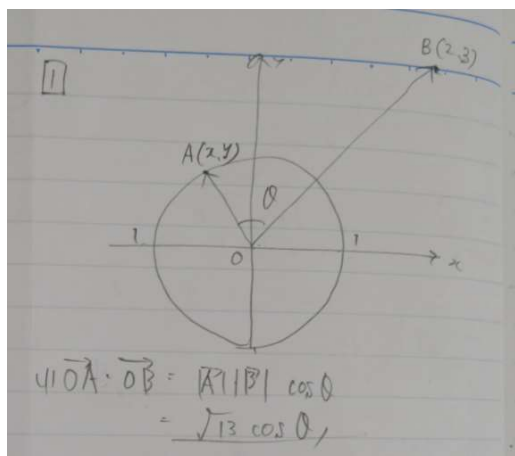
＜1＞原点Oのxy平面上に点B(2, 3)を定め、円 $x^2 + y^2 = 1$ 上の任意の点をA(x, y)とする。

①内積 $\vec{OA} \cdot \vec{OB}$ を θ の式で表せ。

② $2x + 3y$ の最大値と最小値を求めよ。

回答 ① $\sqrt{13}\cos\theta$

①回答した生徒のノート

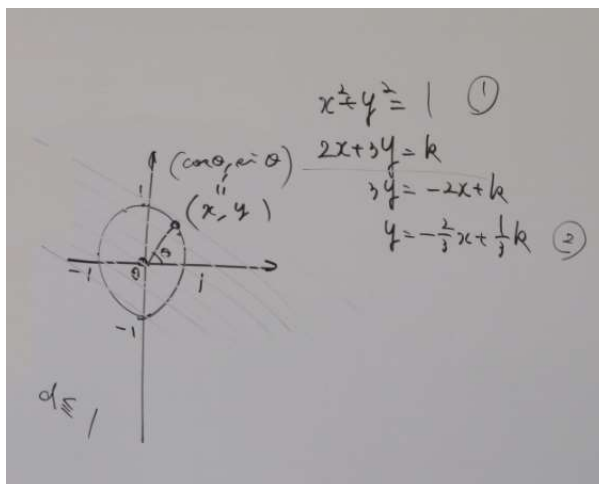


②の解決方法

方法1

$x^2 + y^2 = 1$ と $2x + 3y = k$ の連立方程式で考える。

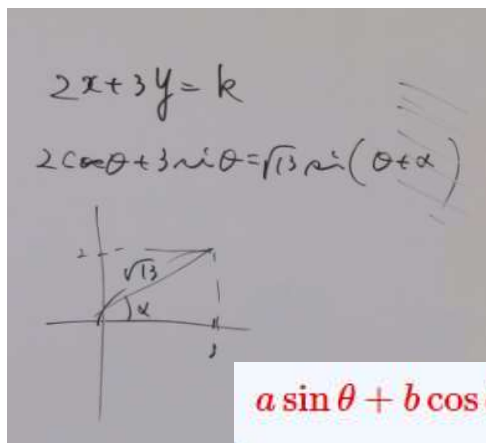
kが解を持つ範囲を判別式で求める。



②の解決方法

方法2

$2\cos\theta + 3\sin\theta = \sqrt{13}\sin(\theta + \alpha)$ と三角関数の合成を用いて求める。



$$a \sin \theta + b \cos \theta = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\theta + \alpha)$$

3 授業のポイント3

〇〇HC（実物投影機・書画カメラ）を用いて、
 「② $2x + 3y$ の最大値と最小値を求めよ」の解決方法を話し合う

Handwritten work (bottom left):

$$(1) \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 & \cdots \textcircled{1} \\ 2x + 3y = k & \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

$$3y = -2x + k$$

$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}k \cdots \textcircled{3}$$

②を①に代入し

$$x^2 + \left(-\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}k\right)^2 = 1$$

$$x^2 + \frac{4}{9}x^2 - \frac{4}{3}xk + \frac{1}{9}k^2 - 1 = 0$$

$$\frac{13}{9}x^2 - \frac{4}{3}xk + \frac{1}{9}k^2 - 1 = 0 \quad (\textcircled{4})$$

$$13x^2 - 4kx + k^2 - 9 = 0$$

$$D = k^2 - 13k^2 + 109$$

$$= -12k^2 + 109 > 0$$

Handwritten work (bottom right):

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$2x + 3y = k$$

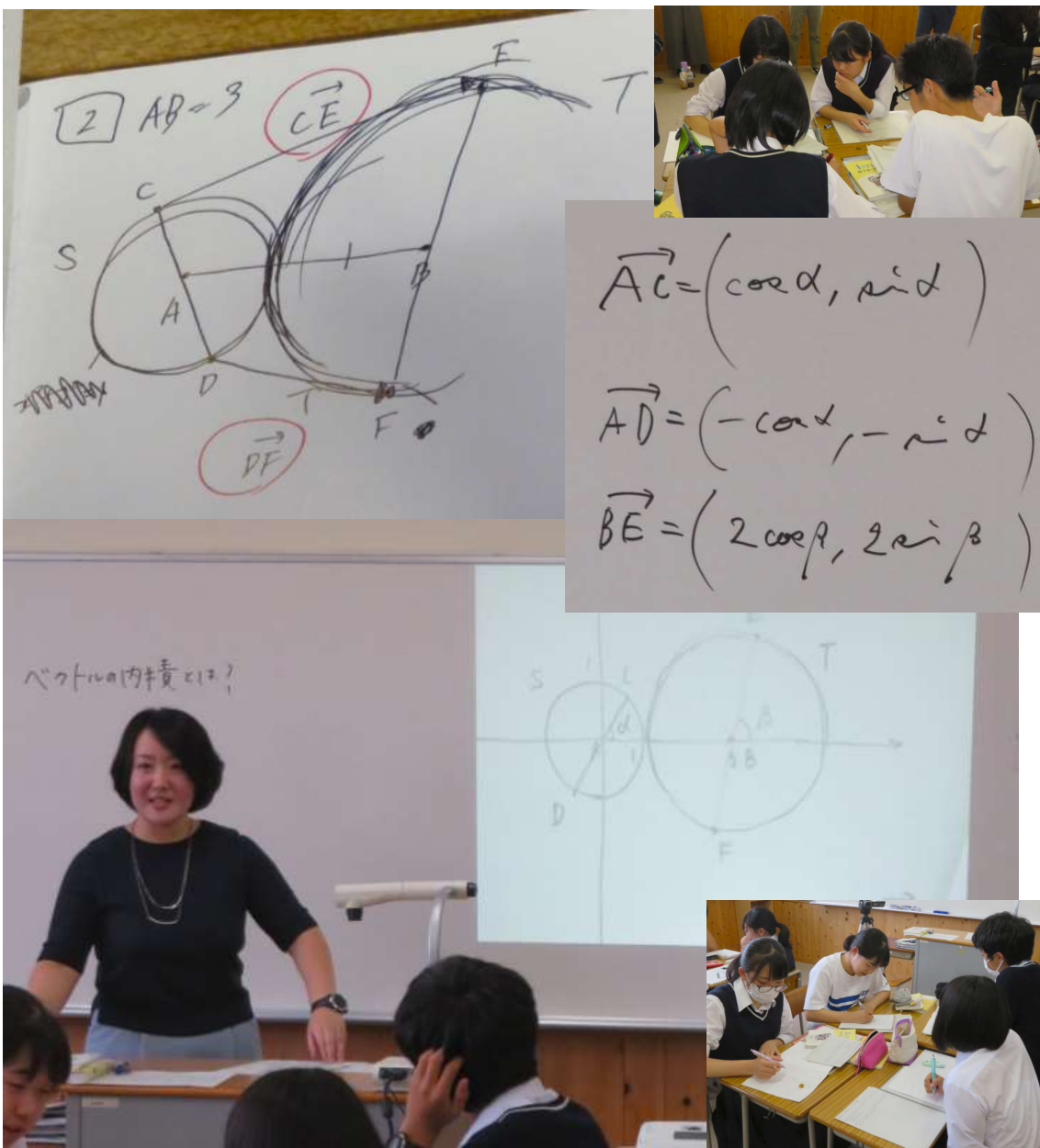
図... $x^2 + y^2 = 1$
 直線... $2x + 3y = k$ $2 \leq k < 7$
 $y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}k$

$b^2 - 4ac$

4 授業のポイント4

○＜ジャンプの課題＞

＜2＞平面上で、 $AB=3$ となる2点A, Bを取る。点Aを中心とする半径1の円をSとし、点Bを中心とする半径2の円をTとする。2点C, Dは円S上を動き、2点E, Fは円T上を動く。ただし、線分CDは点Aを通り、線分EFは点Bを通る。このとき、内積 $\vec{CE} \cdot \vec{DF}$ の最大値と最小値を求めよ。



Handwritten vector equations:

$$\vec{AC} = (\cos \alpha, \sin \alpha)$$

$$\vec{AD} = (-\cos \alpha, -\sin \alpha)$$

$$\vec{BE} = (2 \cos \beta, 2 \sin \beta)$$

Whiteboard text: ベクトルの内積とは?