

数学「組合せ」

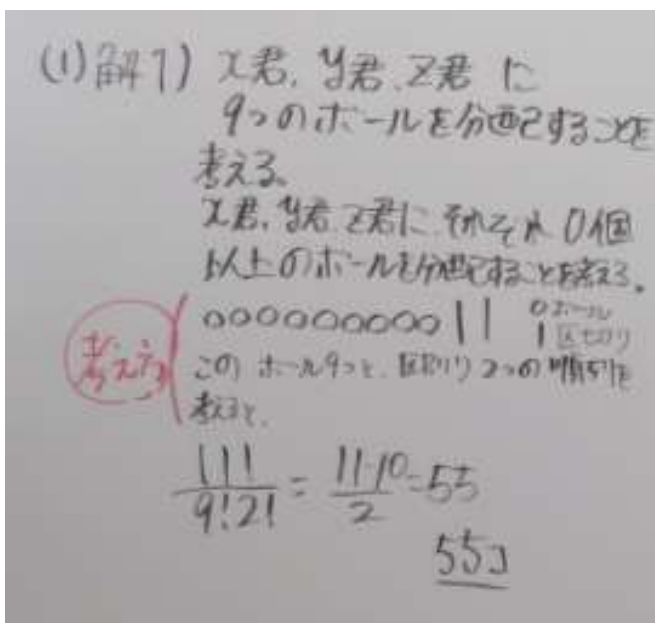
○授業のポイント

○問題を解いて、他の問題に使える「知恵」を見つけよう



○課題 1

- (1) $x+y+z=9$ ($x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$) を満たす整数 (x,y,z) の組の個数を求めよ。
(2) $x+y+z+w=18$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$, $w \geq 0$ を満たす整数 x,y,z,w の組 (x,y,z,w) の組の個数を求めよ。



ボールを3人で分ける
ことは、○9つの中に
2本の区切りを入れる
ことと同じです。その11個の
並べ方と同じです。



解2) 整数問題の扱い

$x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ かつ
 $x \geq y \geq z$ であるとする①
 $x + y + z = 9$ より (17mm理由)
 ①より $3z \leq 9$ なる $z \leq 3, z \geq 0$ より (iii) $z = 2$ とき
 $z = 0, 1, 2, 3$
 (i) $z = 0$ とき $2y \leq 9$
 $x + y = 9$ より $y \leq 4.5$ より $y = 0, 1, 2, 3, 4$
 $y = 0$ とき $x = 9$
 $y = 1$ とき $x = 8$
 $y = 2$ とき $x = 7$
 $y = 3$ とき $x = 6$
 $y = 4$ とき $x = 5$
 (ii) $z = 1$ とき $x + y = 8$
 $y \leq 4$ より $y = 0, 1, 2, 3, 4$
 $y = 0$ とき $x = 8$
 $y = 1$ とき $x = 7$
 $y = 2$ とき $x = 6$
 $y = 3$ とき $x = 5$
 $y = 4$ とき $x = 4$
 (iii) $z = 2$ とき $x + y = 7$
 $y \leq 3$ より $y = 0, 1, 2, 3$
 $y = 0$ とき $x = 7$
 $y = 1$ とき $x = 6$
 $y = 2$ とき $x = 5$
 (iv) $z = 3$ とき $x + y = 6$
 $y \leq 3$ より $y = 0, 1, 2, 3$
 $y = 0$ とき $x = 6$
 $y = 1$ とき $x = 5$
 $y = 2$ とき $x = 4$
 $y = 3$ とき $x = 3$

実際は x, y, z の範囲は存在しないので
 $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ を加味
 (x, y, z) の組は
 $6, 7, 1, 1, 3, 4$
 $= 42 + 1 + 12$
 $= 55$
 よって (x, y, z) の組は 55



対称性

解2) 整数問題の扱い

$x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ かつ
 $x \geq y \geq z$ であるとする①
 $x + y + z = 9$ より (17mm理由)
 ①より $3z \leq 9$ なる $z \leq 3, z \geq 0$ より
 $z = 0, 1, 2, 3$



$x \geq y \geq z$ であるとしていいのは、
なぜでしょう？



nCr



x, y, z は、順番を入れ替えての
変わらない対称性をもっているからです。



○課題2

10 個の文字、N、A、G、A、R、A、G、A、W、A を左から右へ横一列に並べる。

- (1) この 10 個の文字の並べ方は全部で何通りあるか？
- (2) 「NAGARA」という連続した 6 文字が現れるような並べ方は全部で何通りあるか？
- (3) N、R、W の 3 文字が、この順に現れるような並べ方は全部で何通りあるか？
ただし、N、R、W が連続しない場合も含める。
- (4) 同じ文字が隣り合わないような並べ方は全部で何通りあるか？

139 方針 順列

Why 文字の並べ換え

(1) 10個の文字の中で
A が5つ、G が2つあるので

(2) NAGARA と全体で1つの文字と見
5文字の並べ換えとすると
A が2つあるので

(3) N、R、W がこの順に並ぶ時
この3文字は同一の文字とみなせる。
(1)と同様にして

(1) 10個の文字の中で
A が5つ、G が2つあるので

$$\frac{10!}{5! \times 2!} = 15120 \quad \text{考え方}$$

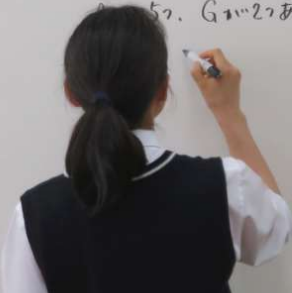
(2) NAGARA と全体で1つの文字と見
5文字の並べ換えとすると
A が2つあるので

$$\frac{5!}{2!} = 60$$

(3) N、R、W がこの順に並ぶ時
この3文字は同一の文字とみなせる。
(1)と同様にして

$$\frac{10!}{5! \cdot 2! \cdot 3!} = 2520$$







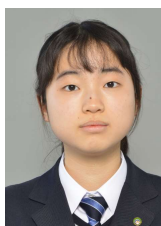






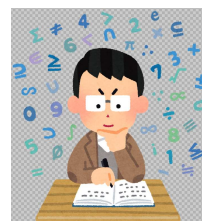
N、R、W を同じ文字と見なせるのは、なぜでしょう？

nCr



全ての場合の中には NRW の並び方や、RWN や WRN の並び方があります。

でも、この条件では、RWN や WRN の並び方を考えてはいけません。



(4) 題意 $\Leftrightarrow$ A と同じ G と同じに隣り合わない
 $\Leftrightarrow$ GGNRW の両端と文字間の 6 つのうち 5 つに A が入る
 目的
 G が隣り合わない
 $\Leftrightarrow 6C_5 \times \frac{5!}{2!} - 4C_5 \times 4!$
 $= 360 - 24 = \underline{336}$



GGNRW の両端と文字の間の 6 つのうち 5 つに A が入るとは、
 どういうことですか？



$\Downarrow$ nCr



A が隣り合わないとは、A と A の間に文字があるということです。
 A を除いた $\bigcirc G \bigcirc G \bigcirc N \bigcirc R \bigcirc W \bigcirc$ には、両端を含めると 6 つ文字を置ける場所があります。

$\times A \cdot A \cdot A \cdot A \cdot A \times$



nCr

問題を解いて見つけた知恵を自分の言葉にしておきましょう！

